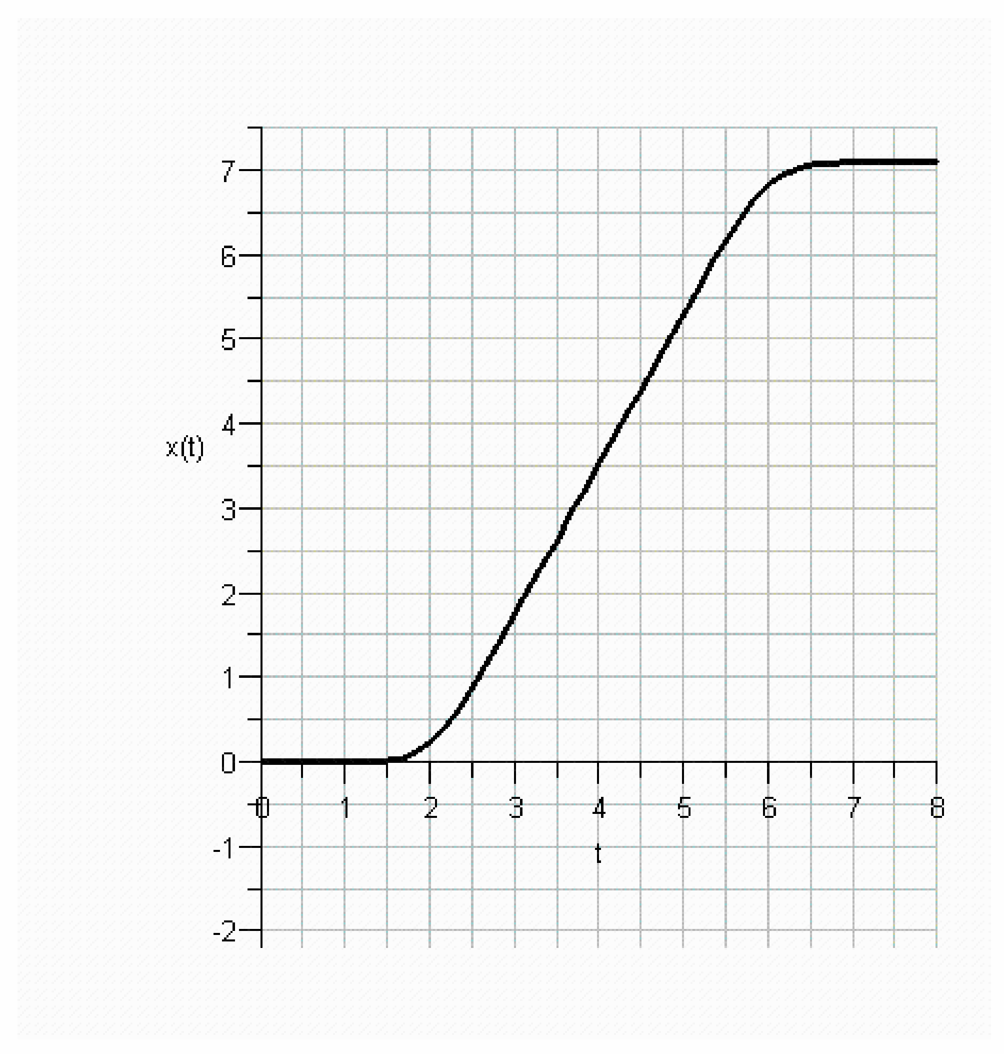
Aufgabe „Modellieren einer gesteuerten Bewegung“



Das Diagramm stellt die Bewegung x(t) eines Fahrstuhls dar, der von 0 nach 7 fährt.
Die Geschwindigkeit v(t) ist die erste Ableitung nach der Zeit, die Beschleunigung a(t) die zweite.
In der gesamten Aufgabe kann ohne Einheiten gerechnet werden.

a) Zeichnen Sie v(t) und a(t) in das Diagramm **auf dem Aufgabenblatt** ein und erläutern Sie Ihr Vorgehen.
Man ersetzt x(t) durch Geradenstücke (stückweise gleichförmige Bewegung).
Welche Folgen hat das für v(t) und a(t)?

(5 VP)

b) Man verbindet die horizontalen Geradenstücke von x(t) knickfrei mit einer ganzrationalen Funktion. Geben Sie jeweils einen möglichen Funktionsterm für x(t), v(t) und a(t) an.
Weshalb lassen sich die so erhaltenen Funktionen (insbesondere v(t) und a(t)) in der Praxis (also beim Betrieb eines Fahrstuhls) nicht verwenden?

(4 VP)

c) Ein Ingenieur möchte die Ansteuerung des Fahrstuhlmotors etwas professioneller gestalten. Er weiß, dass dazu die Beschleunigung beim Anfahren z.B. folgender Differentialgleichung genügen sollte: $a'(t) = -\frac{2}{s^2}(t - t_0) \cdot a(t)$

Dabei sind t_0 und s geeignet zu wählende Parameter.

Geben Sie für $0 \le t \le 8$ einen zum Schaubild von x(t) passenden Funktionsterm für a(t) an.

(5 VP)

d) Ein alternativer Ansatz für die Ansteuerung des Fahrstuhlmotors wäre die Differentialgleichung $a'(t) = -\frac{2}{s^2}(t - t_0) \cdot a(t)^2$. Für welchen Ansatz wird sich der Ingenieur entscheiden?

(4 VP)

Modellieren von gesteuerten Bewegungen - heute ein Alltagsproblem (Automatik...)
Modellieren bedeutet hier das Durchspielen von Funktionsklassen...

Vorspann

Eine ruckfreie Bewegung (Transport von A (Ruhe) nach B (Ruhe)) wird am besten (?) durch Gaußfunktionen modelliert:

$a := 2\,e^{-4\,(t-2)^2} - 2\,e^{-4\,(t-6)^2}$

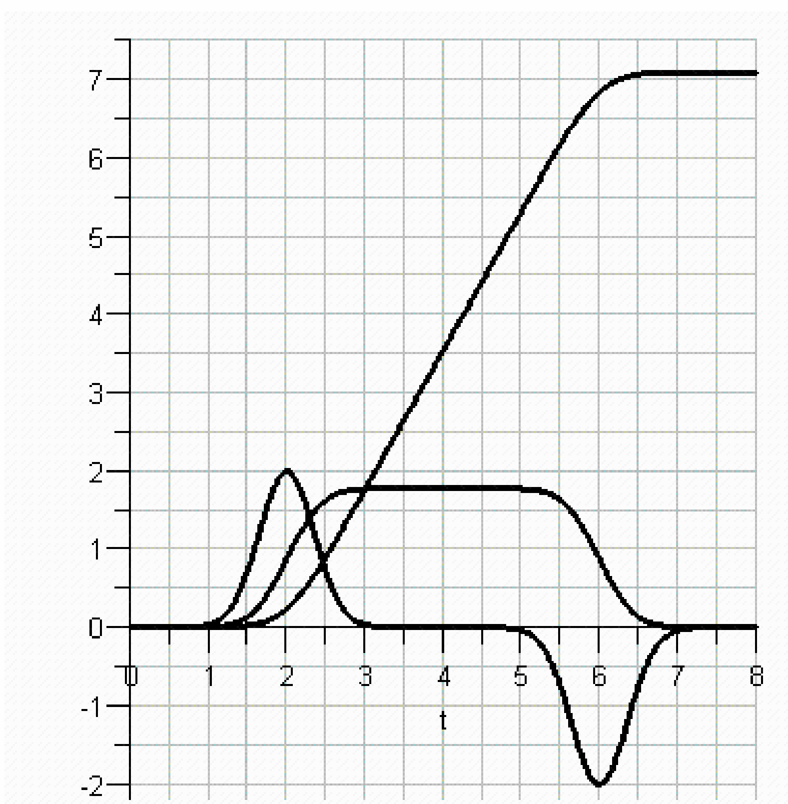
$$2\,e^{-4\,(t-2)^2} - 2\,e^{-4\,(t-6)^2}$$

$v := int(a, t)$

$$\frac{\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(2\,t-4)}{2} - \frac{\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(2\,t-12)}{2}$$

$x := simplify(int(v, t) + 2\cdot\mathrm{sqrt}(\pi))$

$$\frac{\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(2\,t-4)\,t}{2} - \sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(2\,t-4) + \frac{e^{-4\,(t-2)^2}}{4} - \frac{\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(2\,t-12)\,t}{2} + 3\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(2\,t-12) - \frac{e^{-4\,(t-6)^2}}{4} + 2\sqrt{\pi}$$



Lösung

Das Diagramm stellt die Bewegung x(t) eines Fahrstuhls dar, der von 0 nach 7 fährt.
Die Geschwindigkeit v(t) ist die erste Ableitung nach der Zeit, die Beschleunigung a(t) die zweite.
In der gesamten Aufgabe kann ohne Einheiten gerechnet werden.

a) Zeichnen Sie v(t) und a(t) in das Diagramm auf dem Aufgabenblatt ein und erläutern Sie Ihr Vorgehen.
[in der Lösung wird auch erwartet, dass die Geschwindigkeit über eine längere Zeit konstant etwa 2 ist, sowie eine passende Lage und Höhe der Beschleinigungsspitzen (also eine "halbquantitative Behandlung"). Lösung siehe Vorspann.]

Man ersetzt x(t) durch Geradenstücke (stückweise gleichförmige Bewegung). Welche Folgen hat das für v(t) und a(t)?
[das ist auch ein Lösungshinweis!]

(5 VP)

Alternativen:
Mit welchen Funktionsklassen lassen sich x(t)... darstellen und mit welchen nicht (Hinweis: Asymptotik)?
Geben Sie einen Funktionsterm an, der zur Beschleunigung beim Anfahren passen könnte.

b) Man verbindet die horizontalen Geradenstücke von x(t) knickfrei mit einer ganzrationalen Funktion. Geben Sie einen möglichen Funktionsterm für x(t), v(t) und a(t) an.
Weshalb lassen sich die so erhaltenen Funktionen in der Praxis nicht verwenden?

$y := t \rightarrow a1 \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$

$$t \mapsto a1\, t^3 + b\, t^2 + c\, t + d$$

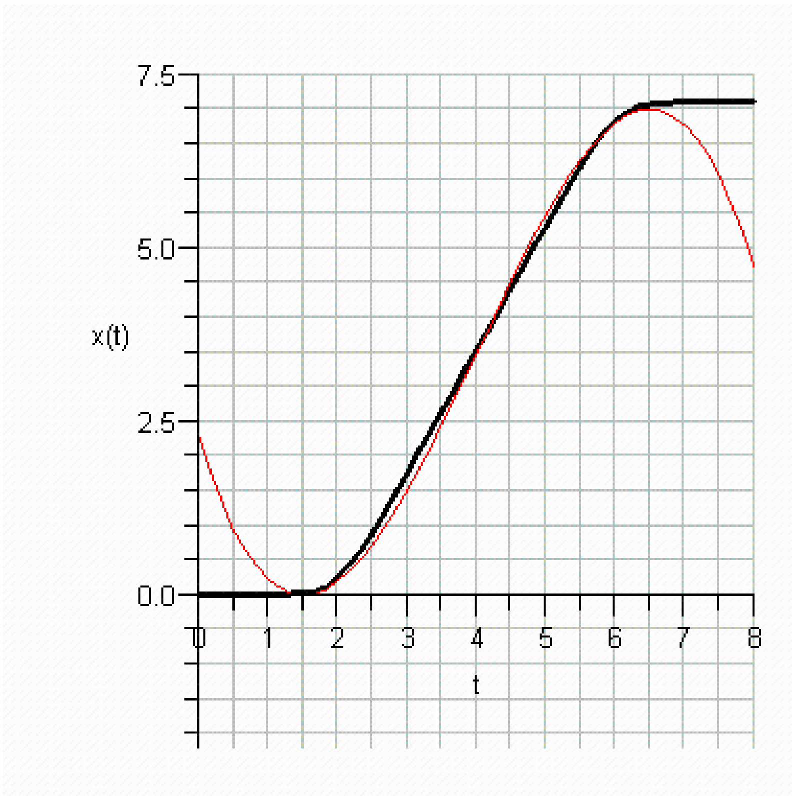
$solve(\{y(1.5) = 0, y'(1.5) = 0, y(6.5) = 7, y'(6.5) = 0\})$

$$\{d = 2.268000000,\ a1 = -0.1120000000,\ b = 1.344000000,\ c = -3.276000000\}$$

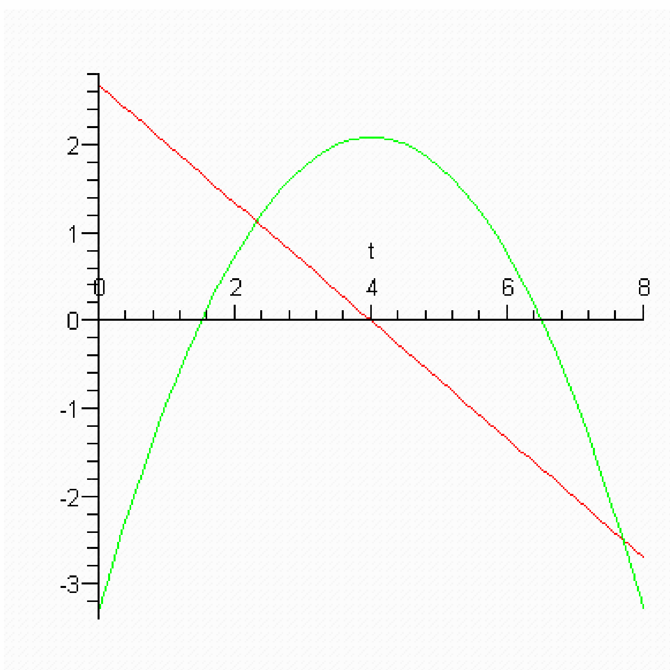
$assign(\%)$

$y(t)$

$$-0.1120000000\, t^3 + 1.344000000\, t^2 - 3.276000000\, t + 2.268000000$$



$plot([y''(t), y'(t)], t = 0 ..8)$



Erstaunlich, wie wenig sich die x-t-Diagramme unterscheiden und wie sehr v-t- und a-t!
"Das Differenzieren bringt es an den Tag..."

(4 VP)

c) Ein Ingenieur möchte die Ansteuerung des Farstuhlmotors etwas professioneller gestalten. Er weiß, dass dazu die Beschleunigung beim Anfahren folgender Differentialgleichung genügen sollte

$$dsolve\left(z'(t) = -\frac{2}{s^2}(t - t0)\cdot z(t)\right)$$

$$z(t) = \_C1\, e^{-\frac{t\,(t-2\,t0)}{s^2}}$$

$$aexp := rhs(\%)$$

$$\_C1\, e^{-\frac{t\,(t-2\,t0)}{s^2}}$$

$$\_C1 := solve\left(subs\left(s = \frac{1}{2},\ t0 = 2,\ t = 2,\ aexp\right) = 2\right)$$

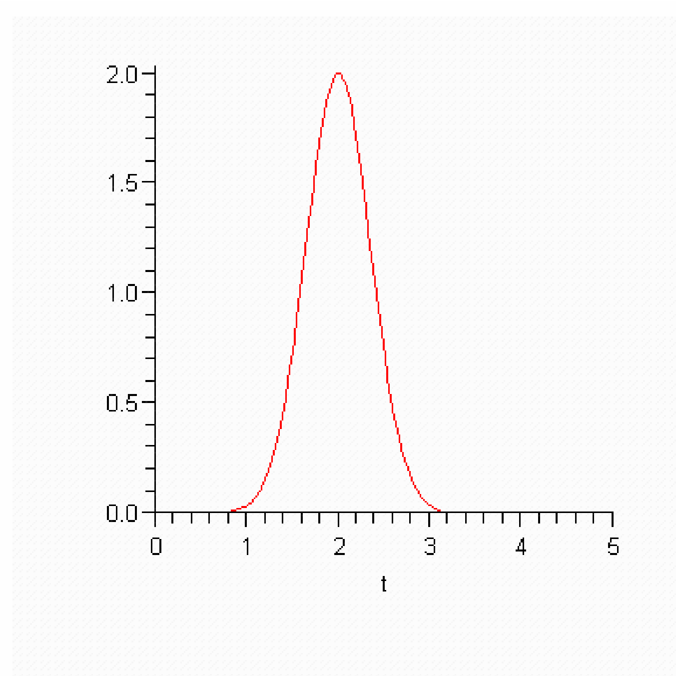
$$\frac{2}{e^{16}}$$

$$subs\left(s = \frac{1}{2},\ t0 = 2,\ aexp\right)$$

$$\frac{2\, e^{-4\,t\,(t-4)}}{e^{16}}$$

$$simplify(\%)$$

$$2\, e^{-4\,(t-2)^2}$$



Lösung siehe Vorspann.

(5 VP)

d) Ein alternativer Ansatz für die Ansteuerung des Fahrstuhlmotors wäre die Differentialgleichung (s.u.). Für welchen Ansatz wird sich der Ingenieur entscheiden?

$$dsolve\left(z'(t) = -\frac{2\cdot(t-t0)\cdot z(t)^2}{s^2}\right)$$

$$z(t) = \frac{s^2}{t^2 - 2\,t0\,t + \_C2\,s^2}$$

$$g := rhs(\%)$$

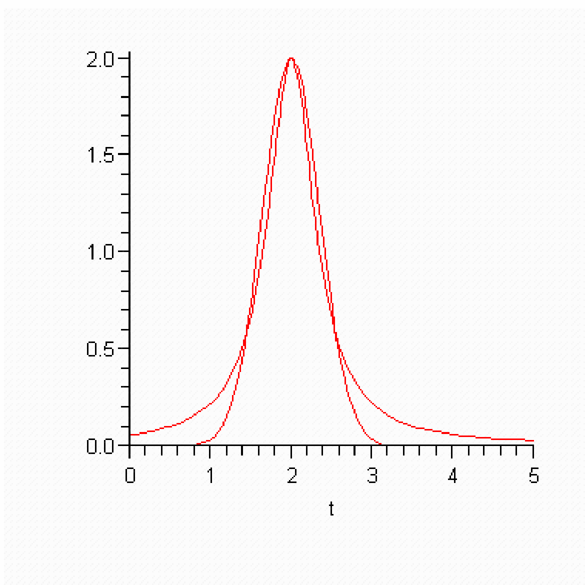
$$\frac{s^2}{t^2 - 2\,t0\,t + \_C2\,s^2}$$

$$gs := solve\left(subs\left(t = 2,\, t0 = 2,\, s = \frac{1}{2},\, g\right) = 2\right)$$

$$\frac{33}{2}$$

$$agebr := subs\left(\_C2 = \frac{33}{2},\, s = \frac{1}{2},\, t0 = 2,\, g\right)$$

$$\frac{1}{4\left(t^2 - 4\,t + \frac{33}{8}\right)}$$



$$vgebr := int(agebr, t)$$

$$\frac{\sqrt{2}\,\arctan\left(\frac{(16\,t-32)\sqrt{2}}{8}\right)}{2}$$

$limit(vgebr, t = \infty)$

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

$vgebr := int(agebr, t) + \frac{\pi\sqrt{2}}{4} - 0.1$

$$\frac{\sqrt{2}\,\arctan\left(\frac{(16\,t-32)\sqrt{2}}{8}\right)}{2} + \frac{\pi\sqrt{2}}{4} - 0.1$$

$xgebr := int(vgebr, t)$

$$0.2500000000\,(2.828427125\,t - 5.656854249)\arctan(2.828427125\,t - 5.656854249) - 0.1250000000\ln\left((2.828427125\,t - 5.656854249)^2 + 1\right) + 1.010720735\,t$$

Die Funktion kann - gerade mit einem CAS - auch durch Probieren angepasst werden!
Die Entscheidung dürfte nicht schwer fallen... oder doch?

(4 VP)